KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Összefüggő és jól láncolt relátor terek

Írta: Kurdics János
Témavezető: dr. Száz Árpád

Doktori értekezés
Debrecen, 1991.

Bevezetés

Az irodalomban az uniform struktúrák többféle általánosításával találkozhatunk; a relátor terek is ilyen általánosításnak tekinthetők, elhagyva az összes axiómát. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak a reflexív relátorokra szorítkozunk; az eredmények egy része tovább általánosítható lenne, azonban másutt a reflexivitás elhagyása kényelmetlenségekhez vezetne. A relátorok elméletének kidolgozója Száz Árpád volt ([30], [35]). A struktúra egyszerűsége ellenére meglepően sok eredmény bizonyítható – az uniform, a proximális és a topologikus jellegű kérdések itt egységesen kezelhetők.

A jól láncoltság fogalmát először 1883-ban Cantor használta ([39, 29.o.]); az ε-lánc definiálása az összefüggőséggel kapcsolatban merült fel nála. Meghatározása szorosan kötődött a távolság fogalmához. Általánosabb térben az összefüggőség ma elfogadott definícióját Riesz adta 1906-ban [27, 103.o.], bár az ötlet már 1893-ban fellelhető volt Jordan *Cours d' Analyse* című munkájában. Mindkét fogalom közvetlenül átvihető uniform struktúrákra is, ahol viszonyukat többen vizsgálták ([6], [7], [17], [24], [27]).

Az első fejezetben több összefüggőségi fogalmat vezetünk be és jellemzünk, továbbá bizonyos feltételek melletti ekvivalenciájukat vizsgáljuk. A második fejezetben a jól láncolt relátorok tulajdonságait fogjuk tárgyalni. A harmadik fejezet az előző kettő eredményeit felhasználva a fogalompár viszonyát tárja fel. A negyedik és az ötödik fejezetben az általános eredményeket szemléltetjük speciális relátor terek segítségével.

A bevezetés hátralevő részében azokat az alapvető jelöléseket, fogalmakat és tulajdonságokat ismertetjük felsorolásszerűen, amelyeket az egyszerűség kedvéért az irodalomra tett külön utalás nélkül fogunk alkalmazni. Természetesen az egyéb felhasznált eredményekre a szokásos módon hivatkozni fogunk.

Egy relátor tér egy $X(\mathcal{R}) = (X, \mathcal{R})$ rendezett pár, ahol X egy halmaz és $\mathcal{R}$ az X-en adott reflexív relációk nemüres családja, amelyet az X-en adott relátornak nevezünk.

Ha (x_α) és (y_α) nettek (az indexhalmaz itt csak prerendezett, nem pedig irányított), A és B az X részhalmazai és x az $X(\mathcal{R})$ tér egy pontja, akkor a következő jelöléseket alkalmazzuk:

(i) $(y_\alpha) \in Lim_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ illetve $(y_\alpha) \in Adh_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ akkor és csak akkor, ha az $((y_\alpha), (x_\alpha))$ nett lényegében illetve gyakran benne van minden $R \in \mathcal{R}$-ben;

(ii) $x \in lim_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ illetve $x \in adh_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ akkor és csak akkor, ha $(x) \in Lim_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ illetve $(x) \in Adh_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$;

(iii) $B \in Cl_{\mathcal{R}}(A)$ illetve $B \in Int_{\mathcal{R}}(A)$ pontosan akkor, ha $R(B) \cap A \neq \emptyset$ minden $R \in \mathcal{R}$ esetén illetve $R(B) \subset A$ valamely $R \in \mathcal{R}$ esetén;

(iv) $x \in cl_{\mathcal{R}}(A)$ illetve $x \in int_{\mathcal{R}}(A)$ akkor és csak akkor, ha $\{x\} \in Cl_{\mathcal{R}}(A)$ illetve $\{x\} \in Int_{\mathcal{R}}(A)$.

Ha az $\mathcal{R}$ egy relátor az X halmazon, akkor

$$\mathcal{R}^* = \{ S \subset X \times X : \text{ létezik } R \in \mathcal{R} : R \subset S \},$$

$$\mathcal{R}^\# = \{ S \subset X \times X : \text{ minden } A \subset X : \text{ létezik } R \in \mathcal{R} : R(A) \subset S(A) \}$$

illetve

$$\mathcal{R}^\wedge = \{ S \subset X \times X : \text{ minden } x \in X : \text{ létezik } R \in \mathcal{R} : R(x) \subset S(x) \}$$

a legbővebb relátorok X-en úgy, hogy $Lim_{\mathcal{R}^*} = Lim_{\mathcal{R}}$, $Cl_{\mathcal{R}^\#} = Cl_{\mathcal{R}}$ illetve $lim_{\mathcal{R}^\wedge} = lim_{\mathcal{R}}$ vagy $cl_{\mathcal{R}^\wedge} = cl_{\mathcal{R}}$.

Az $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^\#$ illetve az $\mathcal{R}^\wedge$ relátort az $\mathcal{R}$ relátor egyenletes, proximális illetve topologikus kifinomításának nevezzük. Egy $\mathcal{R}$ relátort az X halmazon vagy egy $X(\mathcal{R})$ relátor teret egyenletesen, proximálisan illetve topologikusan finomnak nevezzük, ha $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^\# = \mathcal{R}$ illetve $\mathcal{R}^\wedge = \mathcal{R}$.

Egy $f : X(\mathcal{R}) \to Y(\mathcal{S})$ leképezést folytonosnak nevezzük, ha $f^{-1} \circ S \circ f \in \mathcal{R}$ minden $S \in \mathcal{S}$ esetén. Továbbá az f leképezést egyenletesen, proximálisan illetve topologikusan folytonosnak nevezzük, ha folytonos mint az $X(\mathcal{R}^*)$, $X(\mathcal{R}^\#)$ illetve az $X(\mathcal{R}^\wedge)$ teret az $Y(\mathcal{S})$ térbe képező leképezés.

Nem nehéz belátni, hogy ezek a folytonossági tulajdonságok megegyeznek a megszokottakkal, azaz

(i) f egyenletesen folytonos akkor és csak akkor, ha az $(y_\alpha) \in Lim_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ állításból következik, hogy $(f(y_\alpha)) \in Lim_{\mathcal{S}}(f(x_\alpha))$;

(ii) f proximálisan folytonos akkor és csak akkor, ha a $B \in Cl_{\mathcal{R}}(A)$ állításból következik, hogy $f(B) \in Cl_{\mathcal{S}}(f(A))$;

(iii) f topologikusan folytonos akkor és csak akkor, ha az $x \in lim_{\mathcal{R}}(x_\alpha)$ illetve az $x \in cl_{\mathcal{R}}(A)$ állításból következik, hogy $f(x) \in lim_{\mathcal{S}}(f(x_\alpha))$ illetve $f(x) \in cl_{\mathcal{S}}(f(A))$.

Egy $\mathcal{R}$ relátort az X halmazon, vagy egy $X(\mathcal{R})$ relátor teret

(i) egyenletesen irányítottnak nevezzük, ha minden $R, S \in \mathcal{R}$ esetén létezik $T \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $T \subset R \cap S$;

(ii) erősen proximálisan irányítottnak nevezzük, ha minden $A_i \subset X$ és $R_i \in \mathcal{R}$ esetén, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$, létezik $R \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $R(A_i) \subset R_i(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(iii) topologikusan tranzitívnak nevezzük, ha minden $x \in X$ és $R \in \mathcal{R}$ esetén létezik $S, T \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $T(S(x)) \subset R(x)$;

(iv) erősen szimmetrikusnak nevezzük, ha $R = R^{-1}$ minden $R \in \mathcal{R}$ esetén;

(v) ténylegesen szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$;

(vi) proximálisan szimmetrikusnak nevezzük, ha minden $A \subset X$ és $R \in \mathcal{R}$ esetén létezik $S \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $S(A) \subset R^{-1}(A)$;

(vii) topologikusan kompaktnak nevezzük, ha minden $R \in \mathcal{R}^{\wedge}$ esetén létezik egy $A \subset X$ véges halmaz úgy, hogy $R(A) = X$.

Világos, hogy egy egyenletesen irányított relátor erősen proximálisan irányított is, de a megfordítás nem szükségszerűen teljesül. Egy egyenletesen irányított relátor térben a $Lim_{\mathcal{R}}$ reláció leszűkíthető az irányított nettekre. Egy $\mathcal{R}$ relátor proximálisan szimmetrikus pontosan akkor, ha a $Cl_{\mathcal{R}}$ reláció szimmetrikus. Tetszőleges $\mathcal{R}$ relátor esetén "erősen szimmetrikus" $\Longrightarrow$ "ténylegesen szimmetrikus" $\Longrightarrow$ "proximálisan szimmetrikus". Egy $X(\mathcal{R})$ relátor tér topologikusan kompakt pontosan akkor, ha $X(\mathcal{R})$ minden interior lefedésének létezik véges részlefedése.

Az $\mathcal{R}$ relátornak az alábbi szimmetrizációjait fogjuk tekinteni:

$$\mathcal{R}\nabla\mathcal{R}^{-1} = \{ R \cup R^{-1} : R \in \mathcal{R} \}, \quad \mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1} = \{ R \circ R^{-1} : R \in \mathcal{R} \}$$

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1} = \{ R \cup S^{-1} : R, S \in \mathcal{R} \}, \quad \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{ R \circ S^{-1} : R, S \in \mathcal{R} \}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}\nabla\mathcal{R}^{-1}$ és $\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1}$ erősen szimmetrikus, valamint $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}$ és $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ ténylegesen szimmetrikus.

Az $X(\mathcal{R})$ tér egy A részhalmazát

(i) proximálisan nyíltnak illetve zártnak nevezzük, ha $A \in Int_{\mathcal{R}}(A)$ illetve $X \setminus A \notin Cl_{\mathcal{R}}(A)$;

(ii) topologikusan nyíltnak illetve zártnak nevezzük, ha $A \subset int_{\mathcal{R}}(A)$ illetve $cl_{\mathcal{R}}(A) \subset A$.

Nyilvánvaló, hogy egy proximálisan nyílt illetve zárt halmaz topologikusan nyílt illetve zárt is, azonban megfordítva ez nem szükségszerűen teljesül. Továbbá egy halmaz proximálisan illetve topologikusan nyílt pontosan akkor, ha a komplementere proximálisan illetve topologikusan zárt. A [30, 6.7.tétel] alapján világos, hogy $X(\mathcal{R})$ topologikusan nyílt halmazai egybeesnek $X(\mathcal{R}^{\wedge})$ proximálisan nyílt halmazaival.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Száz Árpádnak, akinek segítsége nélkül ez a dolgozat soha el nem készülhetett volna.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Császár, Á., *Foundation of General Topology*, Pergamon, London, 1963.
2. Davis, A. S., *Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 886-893.
3. Deák, J., *A counterexample on completeness in relator spaces*, Publ. Math. Debrecen, megjelenés alatt.
4. Efremovic, V. A. és Svarc, A. S., *Az uniform terek egy új definíciója. Proximitás terek metrizációja*, Dokl. Nauk SSSR **156** (1953), 393-396, orosz nyelven.
5. Fletcher, P. és Lindgren, W. F., *Quasi-Uniform Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1982.
6. Gaal, S. A., *Point Set Topology*, Academic Press, New York, 1964.
7. James, I. M., *Topological and Uniform Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.
8. Konishi, I., *On uniform topologies in general spaces*, J. Math. Soc. Japan **4** (1952), 166-188.
9. Kovács, Z., *Belsőképzés által generált relátorok tulajdonságai*, KLTE TTK (1991), diplomamunka.
10. Kurdics, J., *A note on connection properties*, Acta Acad. Paed. Nyíregyháziensis **12** (1990), 57-60.
11. Kurdics, J. és Száz, Á., *Connected relator spaces*, Publ. Math. Debrecen **40** (1991), 1-10.
12. Kurdics, J. és Száz, Á., *Well-chained relator spaces*, kézirat.
13. Kurdics, J. és Száz, Á., *Well-chainedness characterizations of connected relators*, kézirat.
14. Levine, N., *On Pervin's quasi uniformity*, Math. J. Okiyama Univ. **14** (1970), 97-102.
15. Levine, N., *On uniformities generated by equivalence relations*, Rend. Circ. Mat. Palermo **(2) 18** (1969), 62-70.
16. Levine, N., *The finite square semi-uniformity*, Kyungpook Math. J. **13** (1973), 179-184.
17. Levine, N., *Well-chained uniformities*, Kyungpook Math. J. **11** (1971), 143-149.
18. Lubkin, S., *Theory of covering spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 205-238.
19. Mala, J., *Relators generating the same generalized topology*, Acta Math. Hung., megjelenés alatt.
20. Mala, J., *Relátor terek*, KLTE TTK (1991), doktori értekezés.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

21. Mala, J. és Száz, Á., *Equations for families of relations can also be solved*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **12** (1990).
22. Mala, J. és Száz, Á., *Properly topologically conjugated relators*, kézirat.
23. Mala, J., Száz, Á. és Kurdics, J., Á., *Connectedness and well-chainedness properties of symmetric covering relators*, kézirat.
24. Mrówka, S. G. és Pervin, W. J., *On uniform connectedness*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 446-449.
25. Nakano, H. és Nakano, K., *Connector theory*, Pacific J. Math. **56** (1975), 195-213.
26. Pervin, W. J., *Quasi-uniformization of topological spaces*, Math. Ann. **147** (1962), 316-317.
27. Riesz, F., *A térfogalom genezise*, Összegyűjtött munkái I., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
28. Sieber, J. L. és Pervin, W. J., *Connectedness in syntopogenous spaces*, Proc. Amer. Math Soc. **15** (1964), 590-595.
29. Sierpinski, W., *General Topology*, University of Toronto, Toronto, 1956.
30. Száz, Á., *Basic tools and mild continuities in relator spaces*, Acta Math. Hung. **50** (1987), 177-201.
31. Száz, Á., *Cauchy nets and completeness*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **55** (1989), megjelenés alatt.
32. Száz, Á., *Coherences instead of convergences*, Proceedings of the Conference on Convergence and Generalized Functions, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1984, pp. 141-148.
33. Száz, Á., *Compact relator spaces*, kézirat.
34. Száz, Á., *Connectedness of refined relators*, kézirat.
35. Száz, Á., *Directed, topological and transitive relators*, Publ. Math. Debrecen **35** (1988), 179-196.
36. Száz, Á., *Inverse and symmetric relators*, Acta Math. Hung. **60** (1992), megjelenés alatt.
37. Száz, Á., *Lebesgue relators*, Mh. Math. **110** (1990), 315-319.
38. Száz, Á., *Projective and inductive generations of relator spaces*, Acta Math. Hung. **52** (1989), 407-430.
39. Thron, W. J., *Topological Structures*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
40. Ward, L. E., *Topology*, Marcel Dekker, New York, 1972.
41. Whyburn, G. és Edwin, D., *Dynamic Topology*, Springer Verlag, Berlin, 1979.

Abstract

The scope of this dissertation is the connectedness and well-chainedness properties of relator spaces. A relator space, introduced by Száz in [30] and [35], is a certain kind of a generalized uniform space. Namely, it is an ordered pair of an arbitrary set and a nonempty family of reflexive relations given on the set. In spite of the simpleness of their structure, surprisingly many features can be studied and problems of uniform, proximal and topological nature may be treated in a unified way by means of relator spaces.

A short introductory section summarizes basic notations and terminology. Chapter One deals with uniform, proximal and topological connectedness properties of relator spaces, characterizes them and establishes their equivalences under additional restrictions. In Chapter Two well-chained relator spaces are treated. Applying results of the previous two, Chapter Three links connectedness and well-chainedness. Finally, in Chapter Four and Chapter Five general results are demonstrated by investigation of certain special relator spaces.

Tartalomjegyzék