Kurdics János

Algebrai alapismeretek

Kurdics János

Algebrai alapismeretek

Nyíregyházi Főiskola
2006

A kiadást a *Nyíregyházi Főiskola*
Kiadványozási Bizottsága támogatta.

Főiskolai jegyzet

Az automatizált szedés az AmsTEX makrócsomag segítségé
történt. Copyright 1991, 2001 American Mathematical Soci

Kiadja a Bessenyei György Könyvkiadó
Felelős kiadó Dr. Rozgonyi Tibor
Kiadóvezető Karakó András
Készült a Tipographic Kft. nyomdájában
Nyíregyháza, 2006

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Ez a könyv a matematika alapképzés *Algebrai alapismeretek* nevű tárgyához íródott. Első féléves tárgyként bevezető jellegű, célja a további matematikai tanulmányok megalapozásához szükséges ismeretek átadása. Sok új absztrakt fogalom, módszer, bizonyítási technika nehezíti az elsajátítást. Mivel a félévi követelmény gyakorlati jegy megszerzése, a hangsúly, könnyítésként, az alkalmazáson van. Ennek ellenére ezen elméleti anyag elsajátítása a reáépülő algebra kurzusok (és a matematika alapképzés szinte mindegyik kurzusa) elsajátításához elengedhetetlen.

A kézirat bázisát a Főiskolánkon az elmúlt tíz évben tartott előadásaim képezik. Titulusa leginkább oktatási segédanyag lehet, nem mentes a struktúrális következetlenségektől, nem nyújt mélyebb betekintést valamely problémába. Ennek az az oka, hogy az egy féléves előadás kerete nem teszi ezt lehetővé, fontos a tömörség, a lényegre való törekvés. Fogadja a Tisztelt Hallgatóság ezt a segédanyagot úgy, mint a tanulás folyamatához nyújtott segítséget.

A szerző.

I. FEJEZET

NÉHÁNY FONTOS FOGALOM

1. Halmazok, relációk, függvények

A matematika alapfogalma a **halmaz**, amely szemléletesen dolgok összességét jelenti. Az alábbiakban az úgynevezett *naív halmazelméletet* ismertetjük, a halmazelmélet rigorózus megalapozása a matematikai logika tárgykörébe tartozik. Kiindulásképpen adott halmaz az **univerzum** (alaphalmaz), amelyben minden dolog benne van, amit vizsgálunk. Ha adott egy A halmaz, akkor beszélünk annak **halmazelemeiről**, jelölés: $a \in A$, ha a egy dolog. Halmazról feltesszük, hogy bármely dologról egyértelműen eldönthető, hogy a halmazba tartozik-e avagy nem, és feltesszük, hogy az alaphalmaz elemei nem halmazok.

A matematikai vizsgálatok során rendszerint az univerzum (illetve annak egy része) a **természetes számok halmaza**, amely halmaznak létezését feltételezzük, jelölése $\mathbb{N}$. Elemei a **természetes számok**, és teljesülnek az alábbi úgynevezett *Peano*-axiómák:

(1) létezik egy nullának nevezett, 0-val jelölt eleme az $\mathbb{N}$ halmaznak;

minden a természetes számhoz létezik egy a'-vel je
természetes szám, amelyet az a természetes sz
rákövetkezőjének nevezzük, és amelyre teljesül
alábbi három tulajdonság:

(2) különböző természetes számok rákövetkezője külön
(3) nem létezik természetes szám, amelynek rákövetke a nulla;
(4) (a teljes indukció axiómája) ha A az $\mathbb{N}$ hal részhalmaza, az A halmaznak eleme a 0 és az A maz tetszőleges elemével együtt tartalmazza a rákövetkezőjét is, akkor $A = \mathbb{N}$.

A szokásos jelölések és elnevezések: 0'=1 egy, 1'=2 k 2'=3 három, és így tovább.

Az utolsó Peano-axiómán alapul a *rekurzív defi* módszere. Természetes számot, mint paramétert ta mazó fogalmakat vagy elemeket határozunk meg oly mó hogy megadjuk a 0-hoz tartozót, és azt, hogy tetsző n természetes szám esetén az n-hez tartozó fogalo letve elem ismeretében hogyan határozható meg a rákövetkezőhöz tartozó.

Szintén az utolsó Peano-axiómán alapul a *teljes indu bizonyítás* módszere. Természetes számot, mint param tartalmazó állítást bizonyítunk oly módon, hogy be a 0-hoz tartozót, és azt, hogy abból, hogy valam természetes számra teljesül az állítás, következik, ho n' rákövetkezőre is teljesül az állítás.

Halmaz egy halmaz **hatványhalmaza**, amelyne mei a halmaz összes **részhalmazai**, azaz olyan halm amelyeknek minden eleme szintén eleme a kiindul vett halmaznak. Jelölések: a B halmaz hatványha $\mathcal{P}(B)$, illetve $A \subseteq B$, az A halmaz a B halmaz részha illetve a B **halmaz tartalmazza** az A halmazt. **halmaz egyenlő** ha kölcsönösen tartalmazzák eg