

Kurdics János

Algebra II

Nyíregyházi Főiskola
2007

A kiadást a *Nyíregyházi Főiskola*
Kiadványozási Bizottsága támogatta.

©Kurdics János 2007

Főiskolai jegyzet

Bármilyen másolás, sokszorosítás, illetve
adatfeldolgozó rendszerben való tárolás és sokszorosítás
tilos a jogtulajdonos írásbeli engedélye nélkül!

Az automatizált szedés az AmsT_EX makrócsomag segítségével
történt. Copyright 1991, 2001 American Mathematical Society

Kiadja a Bessenyei György Könyvkiadó
Felelős kiadó Dr. Rozgonyi Tibor
Kiadóvezető Karakó András
Készült a Tipographic Kft. nyomdájában
Nyíregyháza, 2007

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	iv
I. fejezet CSOPORTELMÉLET	1
1. A csoport fogalma.....	1
2. Lagrange tétele. Ciklikus csoport.....	12
3. Konjugáltság, normálosztó	17
4. Faktorcsoporthomomorfizmus	21
5. Direkt szorzat, véges Abel-csoportok alaptétele ...	27
6. A p^2 , $2p$, 8-adrendű csoportok. Az S_4 szimmetrikus és az A_5 alternáló csoportok	33
II. fejezet TESTELMÉLET	39
7. Faktorgyűrű, gyűrűk homomorfizmusai	39
8. Prímtest, résztest, testbővítés	43
9. Alkalmazások	62
Irodalomjegyzék	78
Definíciók jegyzéke	79

ELŐSZÓ

Ez a könyv a matematika alapképzés *Algebra II* nevű tárgyához íródott, annak elméleti részét fedi le. Harmadik féléves tárgy, az *Algebra I* kurzus folytatása. Célja két, első pillantásra egymástól távol esőnek tűnő absztrakt teória tárgyalása, hogy a kurzust végző betekintést nyerjen a modern algebra vizsgálati metodikájába. Az előző mondatnak ellentmondva megjegyezzük, hogy a két elmélet valójában egymáshoz igen közeli, és az általuk tárgyalt problémák klasszikusnak tekinthetők.

A kézirat bázisát a Főiskolánkon az elmúlt tíz évben tartott előadásaim képezik. Titulusa leginkább oktatási segédanyag lehet, nem mentes a struktúrális következetlenségektől, nem nyújt mélyebb betekintést valamely problémába. Ennek az az oka, hogy az egy féléves előadás kerete nem teszi ezt lehetővé, fontos a tömörség, a lényegre való törekvés. Fogadja a Tisztelt Hallgatóság ezt a segédanyagot úgy, mint a tanulás folyamatához nyújtott segítséget.

A szerző.

I. FEJEZET CSOPORTELMÉLET

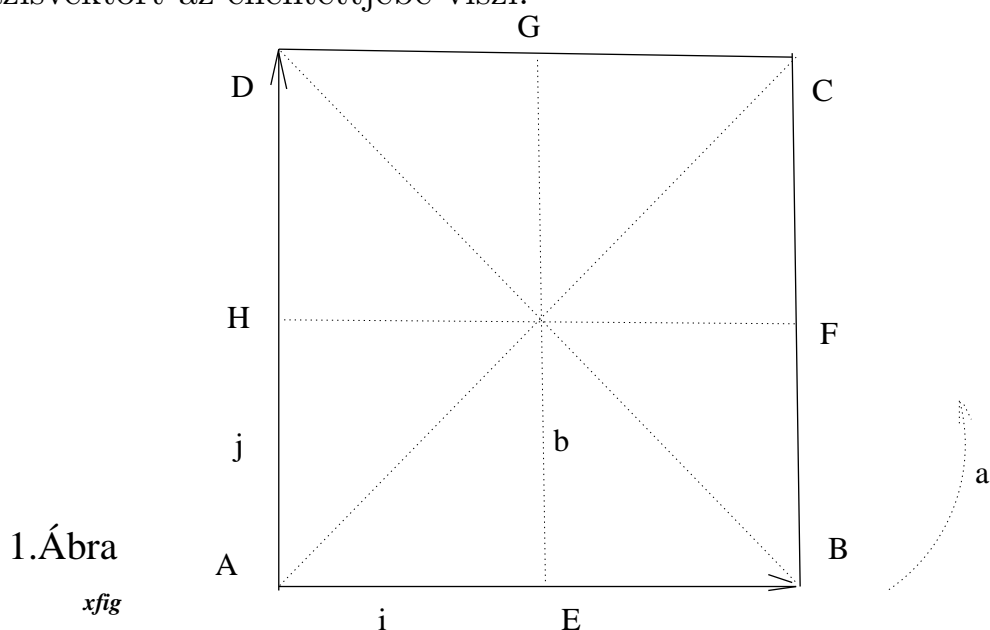
1. A csoport fogalma

A csoportfogalom kialakulása három területen kezdődött. Az első a geometria, a transzformációcsoportok vizsgálata. Már MÖBIUS kezdte úgy osztályozni a geometriákat, hogy mely transzformációcsoportra invariáns tulajdonságokat vizsgál. Például, az euklideszi geometria esetén ez a csoport az izometriák (egybevágósági transzformációk) csoportja. Vizsgáljuk meg ezen (síkbeli) transzformációk közül a négyzet szimmetriáit, pontosabban azokat az egybevágósági transzformációkat, amelyek az $ABCD$ négyzetet önmagába viszik át. Legyenek az oldalfelező pontok E, F, G és H . Jól ismert a lineáris transzformációk matrix előállítás, azaz azonosítsuk a transzformációkat bázis rögzítése után a matrixukkal. A bázist alkossák az $i = \overrightarrow{AB}$ és $j = \overrightarrow{AD}$ vektorok. Jól ismert, hogy a négyzetnek nyolc szimmetriája van: négy elforgatás, a $0, 90, 180, 270$ fokosak, és a négy szimmetriatengelyére vonatkozó tükrözés. A 0 fokos elforgatás az 1 -gyel jelölt identikus transzformáció, matrixa a 2×2 -es egységmatrix. Jelölje a a 90 fokos elforgatást. Ekkor $a(i) = j$ és $a(j) = -i$, azaz a matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A 180 fokos

elforgatás a^2 , matrixa az

$$a^2 = aa = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

skaláris matrix. Valóban, a középpontos tükrözés mindkét bázisvektort az ellentettjébe viszi.



A 270 fokos elforgatás a^3 , matrixa

$$a^3 = a^2 a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valóban, ez az elforgatás az i vektort a $-j$ vektorba, a j vektort a i vektorba viszi. Legyen b az \overleftrightarrow{EG} szimmetriatengelyre történő tükrözés. Ekkor $b(i) = -i$ és $b(j) = j$, azaz a matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A \overleftrightarrow{BD} szimmetriatengelyre történő tükrözés az i vektort a $-j$ vektorba, a j vektort a $-i$ vektorba viszi, azaz a matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vegyük észre, hogy

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

éppen ez a matrix. Az \overleftarrow{FH} szimmetriatengelyre történő tükrözés az i vektort önmagába, a j vektort a $-j$ vektorba viszi, azaz a matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vegyük észre, hogy ez éppen a b matrix ellentettje, és mivel az a^2 matrix éppen a skaláris -1 matrix, ennek a tükrözésnek a matrixa a^2b . Az \overleftarrow{AC} szimmetriatengelyre történő tükrözés az i vektort a j vektorba, a j vektort a i vektorba viszi, azaz a matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vegyük észre, hogy ez éppen a ab matrix ellentettje, és mivel az a^2 matrix éppen a skaláris -1 matrix, ennek a tükrözésnek a matrixa a^3b . Megkaptuk a négyzet szimmetriáit: ezek $1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b$ és a^3b . Nyilván a függvény-szorzás (illetve a matrixszorzás) asszociatív, az identikus transzformáció szimmetria, a négyzet szimmetriáinak szorzata és inverze is a négyzet szimmetriája.

Most már a csoport bármely két elemét össze tudjuk szorozni. Szokásos megadni a művelet-táblázatot, az úgynevezett CAYLEY-táblázatot.

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	1	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	1	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	1	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1