Kurdics János

Algebra I

Nyíregyházi Főiskola
2007

A kiadást a *Nyíregyházi Főiskola*
Kiadványozási Bizottsága támogatta.

Főiskolai jegyzet

Az automatizált szedés az AmsTEX makrócsomag segítségével
történt. Copyright 1991, 2001 American Mathematical Society

Kiadja a Bessenyei György Könyvkiadó
Felelős kiadó Dr. Rozgonyi Tibor
Kiadóvezető Karakó András
Készült a Tipographic Kft. nyomdájában
Nyíregyháza, 2007

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Ez a könyv a matematika alapképzés *Algebra I* nevű tárgyához íródott, annak elméleti részét fedi le. Második féléves tárgy, az *Algebrai alapismeretek* kurzus folytatása. Célja az ott megismert absztrakt fogalmak további finomítása, új, klasszikus módszerek elsajátítása. A félévi követelmény gyakorlati jegy megszerzése és kollokválás. A gyakorlati módszerek elvégzésének megtanulása mellett elkezdődhet a bizonyításigény kialakítása.

A kézirat bázisát a Főiskolánkon az elmúlt tíz évben tartott előadásaim képezik. Titulusa leginkább oktatási segédanyag lehet, nem mentes a struktúrális következetlenségektől, nem nyújt mélyebb betekintést valamely problémába. Ennek az az oka, hogy az egy féléves előadás kerete nem teszi ezt lehetővé, fontos a tömörség, a lényegre való törekvés. Fogadja a Tisztelt Hallgatóság ezt a segédanyagot úgy, mint a tanulás folyamatához nyújtott segítséget.

A szerző.

I. FEJEZET POLINOMELMÉLET – FOLYTATÁS

Ebben a fejezetben algebrai egyenletek megoldásával foglalkozunk. Először a számfogalom további kiterjesztését végezzük el, és látni fogjuk, hogy a kiterjesztés olyan jól sikerült, hogy az új számok körében az algebrai egyenlet összes gyökét megtalálhatjuk. A számfogalom illetve az algebrai egyenletek gyökképlettel történő megoldhatóságának lezárása megnyugtató módon a következő féléves tanulmányaink tárgya.

1. A komplex számok

Könnyen látható, hogy páratlan fokszámú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke, azonban például az x^2+1 polinomnak nincs valós gyöke. Jelölje az i szimbólum egy gyökét, és nevezzük el **képzetes egységnek**, mivel nem valós, hanem „elképzelt" számról van szó, hiszen négyzete -1. Tekintsük az $a_1 + a_2 i$ alakú formális összegeket, ahol az a_1 valós számot **valós résznek**, az a_2 valós számot **képzetes résznek** nevezzük. Az összeadás és a szorzás műveletét végezzük el ahogyan megszoktuk kéttagok esetén, csak a szorzás esetén helyettesítsük be i^2

helyére a -1-gyet, és a kapott struktúra minden, számoktól elvárt műveleti tulajdonsággal rendelkezik. Az $a_1 + a_2i$ nemnulla elem reciprokának megkereséséhez vegyük észre, hogy $(a_1 + a_2i)(a_1 - a_2i) = a_1^2 + a_2^2$ nemnulla valós szám, így az egyenlőséget az $a_1^2 + a_2^2$ és az $a_1 + a_2i$ számmal elosztva kapjuk, hogy $\frac{1}{a_1+a_2i} = \frac{1}{a_1^2+a_2^2}(a_1 - a_2i)$. A precíz bizonyításhoz ezeket az „elképzelt" számokat valós rész – képzetes rész rendezett számpároknak tekintjük.

1.1.TÉTEL. *Legyen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Descartes szorzat, és az összeadás és szorzás műveletét a következőképpen határozzuk meg:*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Ekkor a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ struktúra test.

BIZONYÍTÁS. Legyenek $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2)$ a $\mathbb{C}$ halmaz elemei. Világos, hogy az összeadás és szorzás művelet. A bizonyítás során hivatkozás nélkül felhasználjuk a valós számok műveleti tulajdonságait.

Az additív struktúra Abel-csoport. Az asszociativitás és kommutativitás a valós számok összeadása megfelelő tulajdonságainak közvetlen következménye. Nyilván $(0, 0)$ neutrális elem, az a elem ellentettje $-a = (-a_1, -a_2)$.

Közvetlen számolással kapjuk, hogy egyrészt

$$a(bc) = a(b_1c_1 - b_2c_2, b_1c_2 + b_2c_1) =$$

$$(a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1,$$

$$a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2),$$