

Kurdics János

Diszkrét matematika

Kurdics János

Diszkrét matematika

Nyíregyházi Főiskola
2006

i

A kiadást a *Nyíregyházi Főiskola*
Kiadványozási Bizottsága támogatta.

©Kurdics János 2006

Főiskolai jegyzet

Bármilyen másolás, sokszorosítás, illetve
adatfeldolgozó rendszerben való tárolás és sokszorosítás
tilos a jogtulajdonos írásbeli engedélye nélkül!

Az automatizált szedés az AmSTeX makrócsomag segítségével
történt. Copyright 1991, 2001 American Mathematical Society

Kiadja a Bessenyei György Könyvkiadó
Felelős kiadó Dr. Rozgonyi Tibor
Kiadóvezető Karakó András
Készült a Tipographic Kft. nyomdájában
Nyíregyháza, 2006

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	iv
I. fejezet NÉHÁNY FONTOS FOGALOM	1
1. Halmazok, relációk, függvények	1
2. Műveletek, tulajdonságaik, algebrai struktúrák	6
II. fejezet A SZÁMFOGALOM FELEPÍTÉSE	16
3. A természetes és egész számok	16
4. A racionális és valós számok	22
5. A komplex számok	28
III. fejezet ELEMI SZÁMELMÉLET	35
6. Oszthatóság az egész számok körében	35
7. Diofantoszi egyenlet, kongruencia	46
8. Számrendszerek, racionális számok tizedes tört alakja	53
9. A polinomgyűrű	60
IV. fejezet LINEÁRIS ALGEBRA	67
10. A szabadvektorok	67
11. Vektorterek	88
12. Matrixok	94
13. Matrixok determinánsa	99
14. Lineáris egyenletrendszerek	108
15. Matrix rangja, invertálhatóság	112
16. Lineáris leképezések	116
Irodalomjegyzék	124
Definíciók jegyzéke	125

ELŐSZÓ

Ez a könyv a programtervező informatikus alapképzés *Diszkrét matematika* nevű tárgyához íródott, annak elméleti részét taglalja. Az elnevezés kissé félrevezető: hagyományosan az elnevezés a kombinatorikára és gráfelméletre utal, amely egy erre a tárgyra épülő későbbi kurzus, azonban az utóbbi időben a diszkrét matematika fogalmát általánosabban használják. Első féléves tárgyként bevezető jellegű, célja a további tanulmányok matematikai részének megalapozása. Sok új absztrakt fogalom, módszer, bizonyítási technika nehezíti az elsajátítást, és egyúttal az alkalmazás is igen lényeges a képzés jellegénél fogva.

A kézirat bázisát a Főiskolánkon az elmúlt két évben a programozó matematikus szakosoknak tartott előadásaim képezik. Titulusa leginkább oktatási segédanyag lehet, nem mentes a struktúrális következetlenségektől, nem nyújt mélyebb betekintést valamely problémába. Ennek az az oka, hogy az egy féléves előadás kerete nem teszi ezt lehetővé, az elsajátítandó anyag terjedelmes volta miatt fontos a tömörség, a lényegre való törekvés. Forgassa a Tisztelt Hallgatóság az ezután következő oldalakat mint segédletet a tanuláshoz.

A szerző.

I. FEJEZET

NÉHÁNY FONTOS FOGALOM

1. Halmazok, relációk, függvények

A matematika alapfogalma a **halmaz**, amely szemléletesen dolgok összességét jelenti. Az alábbiakban az úgynevezett *naív halmazelméletet* ismertetjük, a halmazelmélet rigorózus megalapozása a matematikai logika tárgykörébe tartozik. Kiindulásképpen adott halmaz az **univerzum** (alaphalmaz), amelyben minden dolog benne van, amit vizsgálunk. Ha adott egy A halmaz, akkor beszélünk annak **halmazelemeiről**, jelölés: $a \in A$, ha a egy dolog. Halmazról feltesszük, hogy bármely dologról egyértelműen eldönthető, hogy a halmazba tartozik-e avagy nem, és feltesszük, hogy az alaphalmaz elemei nem halmazok. Halmaz egy halmaz **hatványhalmaza**, amelynek elemei a halmaz összes **részhalmazai**, azaz olyan halmazok, amelyeknek minden eleme szintén eleme a kiindulásként vett halmaznak. Jelölések: a B halmaz hatványhalmaza $\mathcal{P}(B)$, illetve $A \subseteq B$, az A halmaz a B halmaz részhalmaza illetve a B halmaz **tartalmazza** az A halmazt. Két halmaz **egyenlő** ha kölcsönösen tartalmazzák egymást, jelölés: $A = B$. Az A halmaz **valódi része** a B halmaznak ha részhalmaza B -nek,

de nem egyenlő vele, jelölés: $A \subset B$. Kitüntetett az **üreshalmaz**, amelyre teljesül, hogy nincsen benne semmi sem, jelölés: \emptyset . Ez része bármely halmaznak. Ha megadhatunk felsorolással, például ha az A halmaz elemei a_1, a_2, a_3, a_4 , akkor a szokásos jelölés $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, illetve kiválaszthatjuk halmazunk elemeit egy adott halmaz B elemei közül valamely tulajdonsággal, jelölés: $A = \{a \in B | P(a)\}$, ahol a B halmaz elemei közül azok alkotják az A halmazt, amelyekre teljesül a P tulajdonság.

Tekintsük át a **halmazműveleteket** (a művelet fogalmáról és a halmazműveletek tulajdonságairól később). Legyen A és B halmaz. **Uniójuk**, $A \cup B$ az a halmaz, amelynek minden eleme eleme A -nak vagy B -nek. **Metszetük**, $A \cap B$ az a halmaz, amelynek minden eleme eleme A -nak és B -nek is. **Különbségük**, $A \setminus B$ az a halmaz, amelynek minden eleme eleme A -nak de nem eleme B -nek. Ha két halmaz metszete az üreshalmaz, akkor azt mondjuk, hogy **diszjunkt halmazok**. Ha az A halmaz része a B halmaznak, akkor A -nak B -re vonatkoztatott **komplementere**, \bar{A} az a halmaz, amelynek minden eleme eleme B -nek de nem eleme A -nak. **Szimmetrikus különbségük**, $A \Delta B$ olyan halmaz, amelynek minden eleme eleme vagy A -nak vagy B -nek, de nem mindkettőnek. Ha \mathcal{A} a $\mathcal{P}(B)$ hatványhalmaz nem üres részhalmaza, akkor képezhetjük a \mathcal{A} **halmazrendszer** $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ **unióját**, amely az a halmaz, amelynek minden eleme eleme legalább egy \mathcal{A} -beli A halmaznak. Képezhetjük a \mathcal{A} **halmazrendszer** $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ **metszetét**, amely az a halmaz, amelynek minden eleme eleme mindegyik \mathcal{A} -beli A halmaznak. Ha $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ véges n elemes halmazrendszer, akkor az unióra és a metszetre a szokásos jelölés $\bigcup_{i=1}^n A_i$ illetve $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Legyen A és B nemüres halmaz. Ekkor halmazok **Descartes-szorzata**, amelynek elemei a **rendezett**